

**Н. А. ТКАЧУК**, д.т.н, проф. НТУ «ХПИ»;  
**А. В. ЛИТВИНЕНКО**, канд. техн. наук, НИЦ УК «РТХ», Харьков;  
**Ю. В. КОСТЕНКО**, мл. научн. сотр. НТУ «ХПИ»;  
**А. Ю. ТАНЧЕНКО**, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;  
**А. В. ГРАБОВСКИЙ**, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

## **ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА ПРОЧНОСТНЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИИ НА ИЗМЕНЕНИЕ ТОЛЩИНЫ**

Большое количество крупногабаритных тонкостенных высоконагруженных машин, предназначенных для длительных сроков эксплуатации, в процессе работы подвергаются утонению силовых элементов вследствие износа. Таким образом, в ходе проектных исследований с целью обеспечения конструкционной прочности этих машин необходимо многовариантное исследование напряженно-деформированного состояния. В работе поставлена и решена задача обеспечения конструкционной прочности тонкостенных элементов машиностроительных конструкций с учетом изменения толщины в процессе эксплуатации, в частности, вызванной воздействием коррозионного износа. Задача поставлена в виде определения чувствительности характеристик тонкостенной конструкции к изменению первоначальной толщины ее элементов. С привлечением аппарата теории возмущений установлены линейные тенденции изменения компонент напряженно-деформированного состояния, а также изменения собственных частот колебаний при малом варьировании толщинами элементов конструкции.

**Ключевые слова:** функция отклика, прочностные и динамические характеристики, тонкостенные конструкции, чувствительность, метод конечных элементов, линеаризация, реперное решение, функция Рэлея, утонение, метод конечных элементов.

**Введение.** Большое количество крупногабаритных высоконагруженных машин, предназначенных для длительных сроков эксплуатации, в процессе работы подвергаются утонению силовых элементов вследствие износа. Для более рационального использования материала эти элементы выполняются в виде тонкостенных конструкций. Данные конструкции подвергаются в процессе многолетней эксплуатации утонению отдельных секций и стенок, причем в общем случае - неравномерному по различным фрагментам. Для транспортно-технологических машин, транспортных средств специального назначения, различных систем объектов бронированной техники, также характерным при этом является наличие значительных нестационарных перемещаемых (с изменяемой областью приложения) нагрузок. Таким образом, в ходе проектных исследований с целью обеспечения конструкционной прочности этих машин необходимо многовариантное исследование напряженно-деформированного состояния их силовых элементов с учетом указанных выше факторов. При этом нужно отметить, что для конструкций сложной формы речь, как правило, идет о численных исследованиях, преимущественно с применением метода конечных элементов (МКЭ) [1].

**Анализ основных достижений и литературы.** Прямое применение аппарата механики сплошной среды [2] и традиционного инструментария МКЭ

к решению возникающей задачи приводит к сложной системе разрешающих уравнений и большому массиву громоздких конечно-элементных моделей, для которых характерны следующие особенности:

а) изменение области, занимаемой исследуемой конструкцией, вследствие коррозионного или иного вида утонения (ведет к необходимости перестройки конечно-элементных моделей);

б) тонкостенность (вследствие чего за изменение области, занимаемой объектом, ответственность несет толщина или поперечное сечение);

в) наличие нормативно устанавливаемых предельных допустимых степеней относительных утонений стенок ( $0 << \alpha_k << 1, k = 1, 2, \dots, N$ ; здесь  $N$  - количество элементов, например, отдельных панелей);

г) изменение величины или перемещение нагрузки за время каждого цикла технологической операции (дополнительный фактор и параметр);

д) необходимость варьирования в процессе исследований структуры и параметров металлоконструкции проектируемой машины, причем желательно за счет естественного расширения инструментария, предлагаемого для моделирования утонения стенок при их эксплуатации.

Возникающая громоздкая задача требует для более оперативного (но с сохранением приемлемой точности) решения разработать новый подход и, соответственно, модифицированную математическую модель. С этой целью для учета базового фактора а) предлагается учесть специфические свойства исследуемых объектов: тонкостенность, малая степень утоняемости, возможность параметризации величины и положения действующих нагрузок. Кроме того, считается справедливой гипотеза о существенно более низкой скорости процесса утонения по сравнению со скоростью остальных процессов, а также об отсутствии значительных динамических эффектов (что, однако, требует дополнительной проверки для каждого конкретного случая). Таким образом, с учетом данных обстоятельств, можно перейти к исследованию пространственных пластинчато-оболочечно-стержневых конструкций с изменяемой в пространстве и времени толщиной (переменным сечением), описываемой при помощи степени утонения  $\alpha$ , равной отношению изменения текущего размера к исходному. Это является отправным элементом предлагаемого подхода. Соответственно, необходимо решить при этом задачи формирования математической модели напряженно-деформированного состояния (НДС), определения собственных частот колебаний (СЧК) исследуемых конструкций и определения влияния малых степеней неравномерного утонения на напряженно-деформированное состояние и величины собственных частот колебаний тонкостенных конструкций путем линеаризации их зависимостей от степеней утонения  $\alpha$ , построенных по результатам расчета при прямом конечном возмущении конечно-элементных моделей исследуемых конструкций.

Описание решения данной задачи на основе подходов, предложенных авторами, является **целью** и составляет содержание данной работы.

**Материалы исследований. Определение напряженно-деформированного состояния утоняемой тонкостенной конструкции.** Рассмотрим математическую модель напряженно-деформированного состояния и собственных колебаний тонкостенных элементов машиностроительных конструкций. Как известно [3], при малых перемещениях напряженно-деформированное состояние стержней и пластин можно разделить. Для стержней можно выделить растяжение – сжатие, кручение и изгиб в двух плоскостях, не влияющие друг на друга (при соответствующем выборе в качестве системы координат главной для сечения). На рис. 1 представлены элементы стержня и пластины, система координат и переменные  $u, v, w, \gamma$  (перемещения вдоль осей  $x, y, z$  и угол поворота сечения относительно оси  $x$  соответственно), относительно которых можно сформировать систему разрешающих уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [EF(x) \cdot u'(x)] + q_x = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} [GI_p(x) \cdot \gamma'(x)] + m_x = 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_z(x) \cdot v''(x)] = q_y; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_y(x) \cdot w''(x)] = q_z; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x, y) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ D(x, y) (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D(x, y) \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = q; \\ \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \Delta u \right] h(x, y) + F_x^- = 0; \\ \left[ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu \Delta u \right] h(x, y) + F_y^- = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E, G, \nu, \lambda, \mu$  – модули упругости I и II рода, коэффициент Пуассона и параметры Ляме материала тонкостенного элемента;  $h(x), h(x, y)$  – распределение толщины вдоль длины или площади тонкостенного элемента в определенный момент времени;  $F(x) \sim h$  – площадь поперечного сечения стержня (пропорциональна толщине  $h(x)$ );  $I_p(x), I_z(x), I_y(x) \sim h^3$  – моменты инерции поперечного сечения стержня, а  $D = Eh^3(x, y)/12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость, распределенная по множеству точек с координатами  $x, y$ . Смысл остальных обозначений виден из рис. 1. Первая четверка уравнений справедлива для стержней, завершающая тройка – для пластинчатых элементов конструкций.

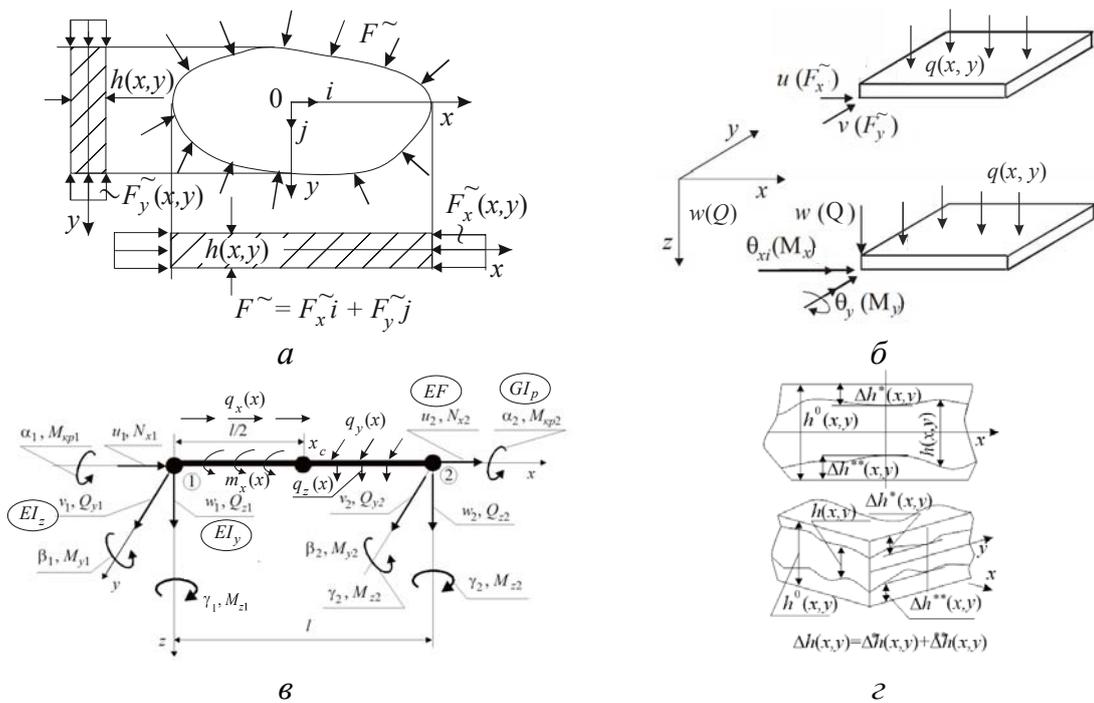


Рис. 1 – Тонкостенные элементы конструкции:

*a* – пластина при нагружении в срединной плоскости; *б* – элементы плоского напряженного состояния и изгиба пластин с указанием обобщенных перемещений и силовых факторов; *в* – изменение текущей толщины  $h(x, y)$  по сравнению с исходной  $h^0(x, y)$ ; *г* – обобщенные перемещения (силы), углы поворота и моменты, нагрузки и жесткостные характеристики сечения стержня.

Таким образом, если принять обозначения:  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  – массив переменных, описывающих состояние исследуемого объекта на множестве точек с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , в операторном виде систему уравнений (1) можно свести к виду:

$$L|_{\Omega} \{ \mathbf{u}(\mathbf{r}), h(\mathbf{r}) \} = q(\mathbf{r}),$$

где  $h = h(\mathbf{r})$  – толщина, выступающая как распределенный параметр.

Если параметр  $h(\mathbf{r})$  получает некоторое возмущение -  $\Delta h(\mathbf{r})$ , то его можно представить в виде (поскольку  $h^0(\mathbf{r}) \neq 0, \mathbf{r} \in \Omega$ ):

$$h = h^0(\mathbf{r}) - \Delta h(\mathbf{r}) = h^0(\mathbf{r}) \left[ 1 - \Delta h(\mathbf{r}) / h^0(\mathbf{r}) \right] = h^0(\mathbf{r}) [1 - \alpha(\mathbf{r})],$$

где  $h^0(\mathbf{r})$  – начальное распределение толщины  $h$ ,  $\alpha(\mathbf{r})$  – степень утонения в заданной точке в текущий момент времени.

Если в свою очередь  $\alpha(\mathbf{r}) \ll 1 \forall \mathbf{r} \in \Omega$ , то задача принимает форму определения решения при малом возмущении  $\alpha$ :  $\mathbf{u} = L^{-1}(h, q) = L^{-1}(h^0(1 - \alpha), q)$ .

Задача (1) эквивалентна в слабом смысле вариационной задаче поиска экстремума функционала полной внутренней энергии системы, который может быть представлен в виде выражений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{E}_1 = \int_{(\Omega)} EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{(\Omega)} q_x u dx; \\ 2\mathcal{E}_2 = \int_{(\Omega)} dx \left[ GI_p \cdot \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 \right] dx + 2 \int_{(\Omega)} m_x \gamma dx; \\ 2\mathcal{E}_3 = \int_{(\Omega)} \left[ EI_z \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx - 2 \int_{(\Omega)} q_y v dx; \\ 2\mathcal{E}_4 = \int_{(\Omega)} \left[ EI_y \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx - 2 \int_{(\Omega)} q_z w dx; \\ 2\mathcal{E}_5 = \int_{(\Omega)} D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{(\Omega)} q w dx dy; \\ 2\mathcal{E}_6 = \int_{(\Omega)} \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + Gh \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy - \\ - \int_{(\Omega)} (F_x^{\sim} u + F_y^{\sim} v) dx dy = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Учитывая отмеченные выше зависимости площади  $F$ , моментов инерции  $I$ , цилиндрической жесткости  $D$  от толщины  $h$ , можно формально записать, что  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(u, h, q) = \mathcal{E}_i(u, h^0, \alpha, q)$ ,  $i = 1 \div 6$ .

Если применить прямые методы для решения задачи минимизации

$$\mathcal{E}_i \rightarrow \min, \quad i = 1 \div 6,$$

т. е. представить решение в виде разложения в ряд по базисным функциям  $\psi$ :

$$u = \sum_k u_k \psi_k(r),$$

то функционалы (2) приводятся к виду:

$$2\mathcal{E}^{\sim} = \sum_{i,j} k_{ij} u_i u_j - \sum_i f_i u_i,$$

где  $k_{ij}$  и  $f_i$  – коэффициенты билинейной  $a$  и линейной  $f$  форм,

порождаемых квадратичной и линейной частями функционалов (2):

$$k_{ij} = a(\psi_i, \psi_j); \quad f_i = f(\psi_i).$$

Важно отметить, что коль скоро в выражениях (2) присутствует параметрическая зависимость от  $h$  (а, значит, и от  $\alpha(r)$ ), то это порождает и зависимость  $k_{ij}$  и  $f_i$  от  $h$  (и от  $\alpha(r)$ ). Если при этом для представления  $h$  и  $\alpha(r)$  применить такое же выражение, как и для функции  $u$ , то получаем зависимость

$$k_{ij} = k_{ij} \sum_k h_k^0 (1 - \alpha_k) \psi_k; \quad f_i = f_i \sum_k h_k^0 (1 - \alpha_k) \psi_k.$$

Следует отметить, что в данном случае в качестве базисных функций  $\psi$  можно выбрать отличные от используемых для аппроксимации  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Если ограничиться конечным числом членов ряда в использованных разложениях, то получаем из условий

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N \Rightarrow Ku = f.$$

Здесь  $K = K(\alpha)$  – матрица коэффициентов  $k_{ij}$ ;  $\alpha$  – массив возмущений толщин  $\alpha_k$ , а  $f = f(\alpha)$  – массив коэффициентов  $f_k$ .

При выборе в качестве базисных кусочно-линейных функций  $\psi$  метода конечных элементов получаем в последнем случае уравнения

$$K(\alpha) \cdot u = f(\alpha),$$

где  $u$  – массив узловых значений искомых величин, а  $K$  и  $f$  – матрица жесткости и массив узловых нагрузок.

Таким образом, исходная локальная постановка (1) через ее вариационную формулировку приводит в конечном итоге при дискретизации к системе линейных алгебраических уравнений МКЭ, причем и матрица жесткости  $K$ , и массив правых частей в общем случае зависят параметрически от массива узловых (или элементных в зависимости от выбранных базисных функций для дискретизации или распределения толщины) степеней  $\alpha$  утонения  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}^T$ . Получив в итоге как один из вариантов способ решения исходной задачи при помощи МКЭ, остановимся на нем более подробно.

**Конечно-элементная формулировка задачи.** Как известно, исследованию напряженно-деформированного состояния крупногабаритных высоконагруженных конструкций с учетом их утонения вследствие износа посвящено много работ [4]. Однако многие из них ориентированы на конструктивные элементы простой формы. В то же время в связи со сложностью геометрической формы исследуемых машиностроительных конструкций для определения их напряженно-деформированного состояния

следует привлекать численные методы, в большинстве случаев – это варианты метода конечных элементов.

В то же время предложенные в упомянутых работах подходы и модели требуют при проведении многовариантных исследований больших затрат вычислительных ресурсов, поскольку предполагают прямое решение задачи анализа, например, с помощью МКЭ, при различных сочетаниях степени утонения разных секций исследуемой конструкции. На практике такой подход приводит к лавинообразному росту вариантов расчетных схем с увеличением всего до нескольких десятков варьируемых параметров толщин (т. е. степени их утонения). В связи с этим возникает задача создания более экономных моделей для численного моделирования напряженно-деформированного состояния подобного типа конструкций, что составляет цель исследований.

**Общий подход к решению задачи.** Рассматривается тонкостенная (пластинчатая в данном случае) конструкция, которая занимает в пространстве область  $\Omega$ . Последнюю можно представить в виде композиций тонкостенных поверхностных участков (листов)  $S_k$ ,  $k=1, \dots, N$ , на которые в направлении нормалей  $\vec{n}_k$  в одну (или в две) сторону наросен материал номинальной толщины  $h_k^0$ . Естественно, что при этом могут быть области интерференции  $I_{ij}$  и пустот  $Z_{ij}$  (рис. 2). Разрешение этих коллизий представляет отдельную задачу, которая может быть решена разными способами [www.ptc.com, www.ansys.com]. Считаем, что эта часть задачи уже решена, и в дальнейшем имеем дело с конечно-элементной Shell – моделью, у которой  $S_k = \text{const}$ ,  $k=1, \dots, N$ ;  $h_k = h_k(t)$  – зависит от времени  $t$ .

В результате получаем систему разрешающих уравнений:

$$K \cdot x = f, \quad (3)$$

где  $K = K(h(t))$  – изменяемая при утонении во времени матрица жесткости конечно-элементного ансамбля;  $h(t) = \{h_1(t) \dots h_N(t)\}^T$  – массив текущих толщин (для каждого участка  $S_k$ ).

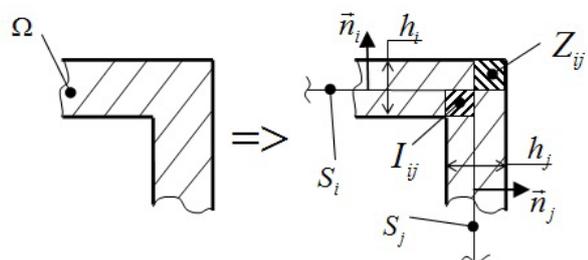


Рис. 2 – Представление области  $\Omega$  в виде объединения подобластей  $S_k \times h_k$

Требуется:

- 1) установить характер изменения элементов матрицы жесткости  $K(t)$  при малом изменении  $h$ ;
- 2) определить решение  $x$  как функцию параметров  $h$ ;
- 3) предложить алгоритм вычисления компонент напряжения конструкции при произвольных изменениях степени утонения отдельных элементов конструкций.

**Представление зависимости компонент матрицы жесткости конструкции от параметров утонения.** Представим процесс утонения во времени  $t$  в виде:

$$h_k = h_k(0) - \Delta h_k(t) = h_k(0)(1 - \alpha_k), \quad (4)$$

где  $\alpha_k = \frac{\Delta h_k(t)}{h_k(0)} \geq 0$  – относительное утонение листа  $k$ , соответствующее

моменту времени  $t$ .

Тогда массив  $\alpha(t) = \{\alpha_1 \dots \alpha_N\}^T$  задает степень утонения всех элементов конструкции. Заметим, что при этом степень детализации (т. е. понятие «элемент») можно довести до уровня «конечный элемент».

Особенностью соответствующих тонкостенных конструкций (типа силовых элементов кранов, перегружателей, отвалообразователей, транспортных средств специального назначения, конвейеров) является устанавливаемая нормативно предельная величина  $\alpha$ , как правило  $\alpha \ll 1$ . В этом случае компоненты матрицы жесткости отдельных элементов  $k_e$ , соответствующие изгибной составляющей и плоскому напряженно-деформированному состоянию, представимы в виде:

$$k_e^{(изг)} = h_e^3 \cdot k_e^{\wedge}, \quad k_e^{(пл)} = h_e \cdot k_e^{\sim}, \quad (5)$$

где  $k_e^{\wedge}, k_e^{\sim}$  – не зависящие от  $\alpha_e$  величины [2-12].

Тогда, удерживая только линейные члены в (5), имеем:

$$k_e^{(изг)} = k_e^{\wedge} \cdot h_{0e}^3 (1 - 3\alpha), \quad k_e^{(пл)} = k_e^{\wedge} h_{0e}^{\wedge} (1 - \alpha). \quad (6)$$

Соответственно, глобальная матрица жесткости представима в виде:

$$K \approx K_0 - K_0'(\alpha), \quad (7)$$

где  $K_0 = K_0(h(0))$  – матрица жесткости конструкции в начальном состоянии;  $K_0'$  – матрица жесткости, составленная из утроенных компонент «изгибных» и одинарных – «плоских» компонент матрицы жесткости  $K_0$ .

Таким образом,  $K_0 \neq K_0(\alpha), K_0' = K_0'(\alpha)$ . При этом  $K_0'$  – симметричная матрица, элементы которой намного меньше компонент матрицы  $K_0$  и представляют собой их линейную комбинацию с коэффициентами  $\alpha_k \ll 1$ .

**Представление решения разрешающей системы уравнений в зависимости от параметров  $\alpha$ .** Решение системы уравнений (1)

$$x = K^{-1} f = (K_0 - K_0')^{-1} f. \quad (8)$$

Представим обратную матрицу в виде

$$(K_0 - K_0')^{-1} \approx C + D. \quad (9)$$

Тогда с учетом малости  $\alpha$ , а, соответственно, компонент  $x_* = \{x_*^{(p)}\}$  и  $D$ ,

$$E = (K_0 - K_0')(K_0 - K_0')^{-1} \approx K_0 C + (K_0 D - K_0' C). \quad (10)$$

Отсюда, сосредоточив в  $C$  не зависящие от  $\alpha$  компоненты, а в  $D$  - зависящие, получаем:

$$C = K_0^{-1}; D = K_0^{-1} \cdot K_0' \cdot K_0^{-1}. \quad (11)$$

Таким образом, решение (8) представимо в виде

$$x(\alpha) = x(0) + K_0^{-1} K_0' \cdot x(0) = (E + K_0^{-1} K_0') x(0). \quad (12)$$

Эта запись аналогична соотношениям, получаемым при решении задачи чувствительности. В данном случае явно определены выражения для нахождения коэффициентов матрицы  $K_0^{-1} K_0'$ , компоненты которой линейно зависят от компонент вектора  $\alpha$ . Таким образом,  $x(\alpha)$  является линейной формой параметров  $\alpha$ .

**Алгоритм многовариантных исследований тонкостенных конструкций с учетом утонения стенок.** С учетом (12) можно записать

$$x^{(p)} = x_0^{(p)} + \sum_{k=1}^N \rho_{kp} \alpha_k x_0^{(p)}, \quad \forall p, \quad (13)$$

где  $\rho_{kp} \alpha_k$  - элементы матрицы  $K_0^{-1} K_0'$ .

Таким образом, для организации многовариантных исследований напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций с учетом утонения стенок (т.е. при разных наборах  $\alpha$ ) можно использовать решение (13).

Коль скоро данные соотношения выведены из приближенных равенств, то их применение ограничено малыми  $\alpha$ . С другой стороны, точность соотношений (13) хоть и может ухудшиться с ростом  $\alpha_k$ , однако тенденцию изменения компонент решения  $\alpha_{(p)}^*$  они будут отражать удовлетворительно.

Поэтому, задавшись предельно допустимыми (нормативными) значениями  $\alpha^*$ , можно по значениям точных решений при задании различных сочетаний  $\alpha^{\sim} = \{0, \dots, \alpha^*, \dots, 0\}$  получить соотношения для определения  $\hat{\rho}_{kp}$  (или чувствительности)

$$\Delta^{(p)} = \left\{ \Delta_1^{(p)}, \Delta_2^{(p)}, \dots, \Delta_{N_e}^{(p)} \right\}^T : \quad \sum_{k=1}^N \hat{\rho}_{kp} \alpha_k^{\sim} x_0^{(p)} = x_*^{(p)} - x_0^{(p)} = \alpha^* \cdot \Delta^{(p)},$$

где  $x_* = \{x_*^{(p)}\}$  - точные решения системы уравнений (3) при  $K = K(\alpha^{\sim})$  (их можно назвать «реперными» решениями).

Решение  $x(a)$  для произвольного распределения утонений  $a$  определяется как линейная комбинация «номинального» и «реперных» решений с соответствующими коэффициентами  $\alpha_k$

$$x_{(\alpha)}^{(i)} = x_0^{(i)} + \sum_k \Delta_i^k \alpha_k . \quad (14)$$

Таким образом, получаем приближенное решение в виде, аналогичном (13), но соответствующее большему диапазону изменения коэффициентов  $\alpha_k$ . При этом «реперные» решения получаются методом прямого конечного возмущения конечно-элементной модели исследуемой тонкостенной конструкции, что является альтернативой методам теории возмущений с вычислением соответствующих чувствительностей по выражению (12).

Важно отметить, что коль скоро при решении «реперных» задач МКЭ кроме узловых перемещений получаем также и компоненты тензора напряжений, то и для них можно применить процедуру линеаризации типа (13). При этом, в силу того, что в этом случае в действие вступают еще и матрицы, соответствующие связи «деформации-перемещения» и «напряжения-деформации», то тенденции изменения компонент вектора перемещений и напряжений могут быть разнонаправленными (т.е., например, росту первых может соответствовать уменьшение последних).

Таким образом, предложенный в работе переход к численному моделированию напряженно-деформированного состояния элементов тонкостенных машиностроительных конструкций с учетом утонения использует линеаризацию матрицы жесткости по коэффициентам утонения стенок. Отклик решения также линеаризуется, что дает преимущества при проведении многовариантных расчетов напряженно-деформированного состояния утоняемых конструкций, а также задач синтеза. Предложен вариант использования линеаризованного представления отклика решения на более широкий диапазон изменения коэффициентов утонения (путем анализа «реперных» решений, получаемых прямым конечным возмущением конечно-элементной модели), что отличает предложенный подход, с одной стороны, от традиционных способов анализа задач чувствительности, а с другой – от простого многовариантного конечно-элементного моделирования.

**Определение спектра собственных частот колебаний утоняемой конструкции.** Для обеспечения безаварийной работы многих машиностроительных конструкций требуется отстройка их собственных частот колебаний от частот возбуждающих нагрузок во избежание резонансных режимов работы. С учетом возможных изменений конструктивных параметров исследуемых машин или сооружений требуется знать также тенденции изменения данных собственных частот колебаний при варьировании этих параметров.

Для решения возникающей задачи можно привлечь функцию Рэлея [5,6], условные экстремумы которой на некоторых собственных формах соответствуют квадрату собственной частоты:

$$\omega_s^2 = \min_{i,j} \frac{\sum_{i,j} K_{ij} \cdot A_{Sj} \cdot A_{Sj}}{\sum_{i,j} M_{ij} \cdot A_{Sj} \cdot A_{jj}}, \quad \omega = 1, 2, \dots, N; \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad A_s = \{A_{S1}, A_{S2}, \dots, A_{SN}\}^T . \quad (15)$$

При этом экстремум ищется на множестве форм, ортогональным формам с более низкими частотами. Учитывая, что при незначительных изменениях степеней утонения/утолщения собственные формы изменяются незначительно, то в первом приближении можно пренебречь изменением собственных форм, и выражение (15) вычислять для форм  $A_S$ , соответствующих базовому варианту исследуемой конструкции, т.е. при  $\alpha_p = 0, p = 1, 2, \dots, N$ . В силу этого, следуя [4], можно записать:

$$\omega_S^2(\alpha) \approx \omega_S^2(0) \frac{1 - \delta_K}{1 - \delta_M}, \quad (16)$$

где  $\delta_K, \delta_M$  - некоторые линейные формы от векторов  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}^T$ . Трансформируя (16) к виду

$$\omega_S(\alpha) \approx \omega_S(0) \left(1 - \frac{1}{2}(\delta_K - \delta_M)\right), \quad (17)$$

закключаем, что собственные частоты можно в первом приближении аппроксимизировать линейными функциями параметров  $\alpha_p$ . Соответственно, для вычисления чувствительности  $\omega_S$  к изменению  $\alpha_p$  можно применить конечно-разностные соотношения:

$$\Delta_{SP} = \left[ \omega_S(0) - \omega_S(\alpha_{(P)}^*) \right] / \alpha_{(P)}^*, \quad (18)$$

где  $\alpha_{(P)}^*$  - некоторое пороговое значение утонения/утолщения (берется, например, из нормативных документов, из практики проектирования или эксплуатации того или иного типа машин), а массив

$$\hat{\alpha}_{(P)} = \{0, 0, \dots, 0, \alpha_{(P)}^*, 0, \dots, 0\}^T. \quad (19)$$

В нем ненулевым элементом является только  $\alpha_{(P)}^*$ . В (19) решения  $\omega_S(\alpha_{(P)}^*)$  можно вычислить, например, используя точные решения с применением МКЭ. В работе [4] такие решения названы, как указано выше, «реперными». Тогда массив чувствительности  $\Delta_{SP}$  дает возможность определить величину изменения собственных частот колебаний при произвольном наборе степеней варьирования толщины (в общем случае – все  $\alpha_{(P)}$  отличные от нуля):

$$\omega_S(\alpha) = \omega_S(0) - \sum_P \Delta_{SP} \cdot \alpha_P, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Т.о., получены зависимости, определяющие не только тенденции, но и позволяющие количественно оценить изменения собственных частот колебаний тонкостенных конструкций при варьировании толщин отдельных

листов. Эти соотношения дополняют аналогичные зависимости для компонент напряженно-деформированного состояния и дают возможность в комплексе оценить изменения прочностных, жесткостных и динамических характеристик тонкостенных конструкций при варьировании толщин их отдельных фрагментов (листов, панелей, секций, элементов).

Для подтверждения возможности линейризации указанных характеристик от параметров  $\alpha_{(P)}$ , характеризующих степень варьирования толщины отдельных элементов тонкостенных конструкций, был решен ряд тестовых задач для реальных машиностроительных изделий. Ниже описано решение задач для корпуса транспортного средства специального назначения (бронетранспортер БТР-3Е) и корпуса вибромашины типа «Грохот». Поскольку задачи носят демонстрационный характер, толщины всех элементов данных конструкций назначались условно и не соответствуют реальным. Важно было определить сам характер изменения компонент напряженно-деформированного состояния и собственных частот колебаний при варьировании этих толщин.

**Результаты исследований корпуса бронетранспортера БТР-3Е.** Общий вид модели корпуса бронетранспортера представлен на рисунке 3, а конечноэлементная его модель (на основе Shell-элементов) – на рисунке 4.

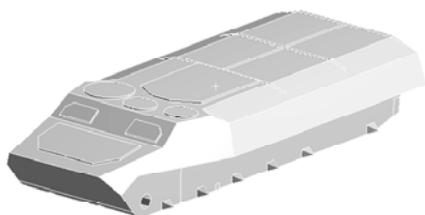


Рис. 3 – Общий вид модели корпуса бронетранспортера

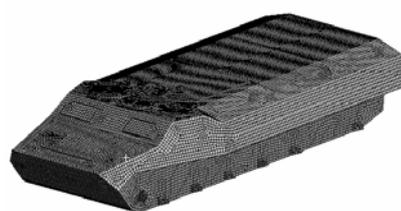


Рис.4 – Конечно-элементная модель корпуса бронетранспортера (на основе Shell-элементов)

На рисунке 5 показаны распределения эквивалентных напряжений, возникающих в корпусе БТР-3Е с варьируемыми толщинами панелей при действии внешнего избыточного давления.

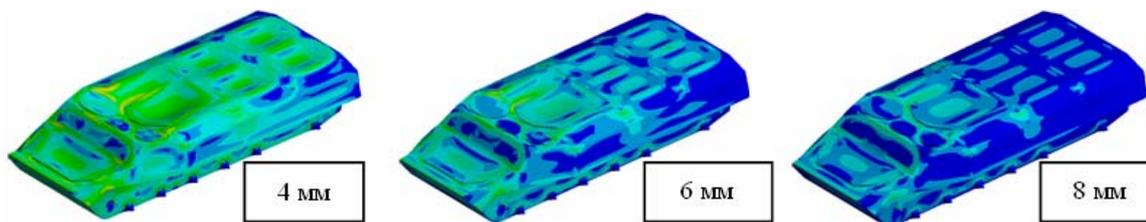


Рис. 5 – Распределения эквивалентных напряжений, возникающих в корпусе БТР-3Е с варьируемыми толщинами панелей при действии внешнего избыточного давления

На рис. 6 – зависимость прогибов и напряжений от степени утонения/утолщения  $\alpha$ . Видно, что в достаточно широких диапазонах эти

зависимости можно с приемлемой точностью аппроксимизировать линейными функциями.

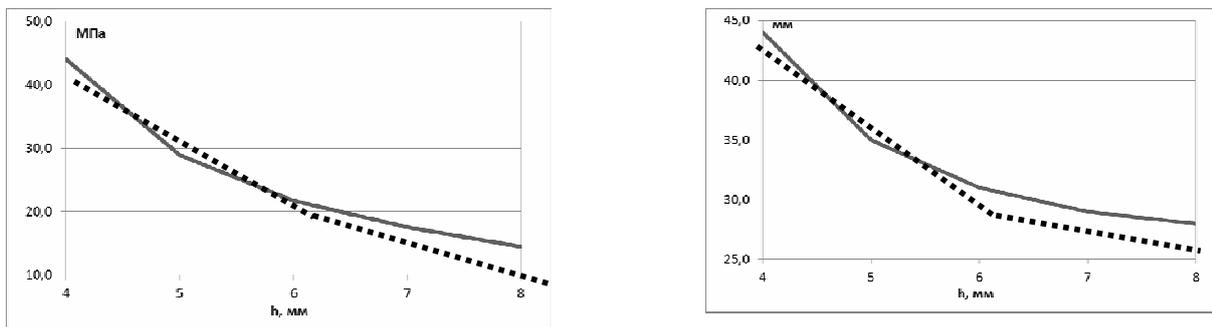


Рис. 6 – Зависимость прогибов и напряжений от степени утонения/утолщения  $\alpha$

На рис. 7 – некоторые формы колебаний корпуса БТР-3Е, а на рис. 8 – зависимость собственных частот колебаний от параметров  $\alpha$ . Эти иллюстрации подтверждают возможность линеаризации зависимостей  $\omega_S = \omega_S(\alpha)$  с сохранением точности до высоких значений  $\alpha$ .

**Корпус вибромашины типа «Грохот».** На рис. 9 – общий вид корпуса виброударной машины для выбивки крупного вагонного литья, а на рис. 10 – ее разбиение на конечные Shell-элементы.

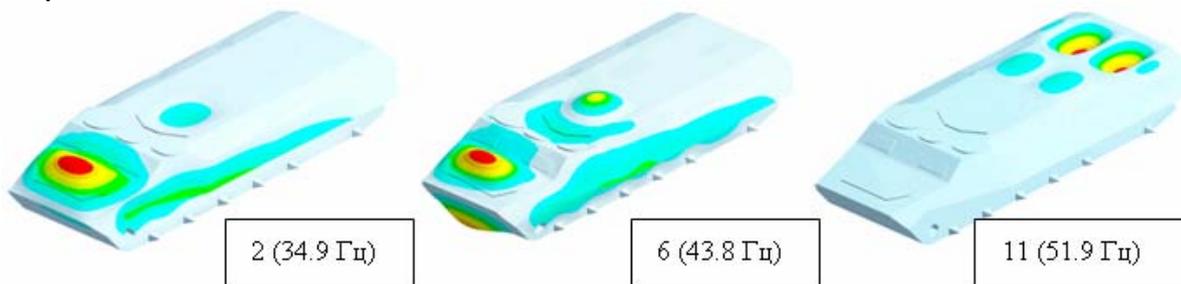


Рис. 7 – Некоторые собственные формы колебаний корпуса МТ-ЛБ (при толщинах элементов корпуса 6 мм)

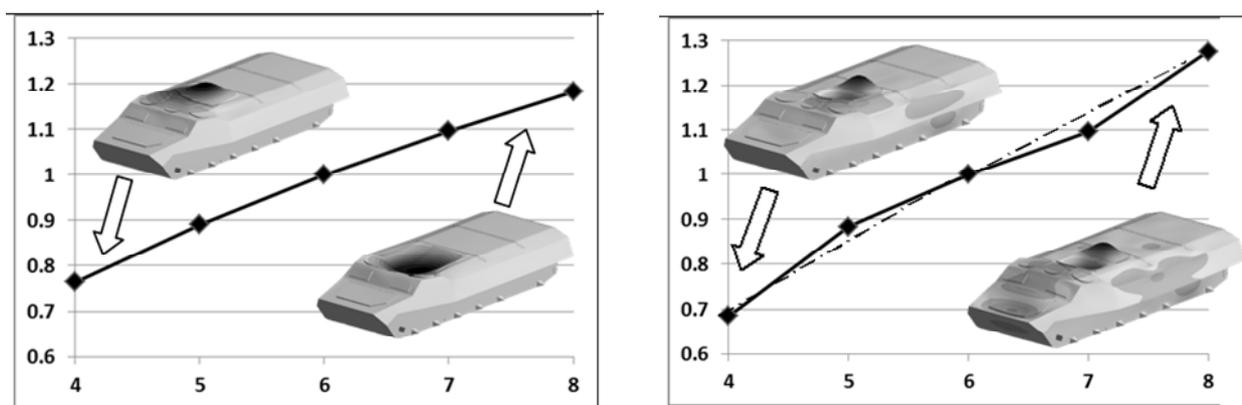


Рис. 8 – Изменения собственной частоты, отнесенной к собственной частоте при толщине элементов корпуса 6 мм, и изменение соответствующей ей формы колебаний при варьировании толщин элементов корпуса в диапазоне  $6 \pm 2$  мм

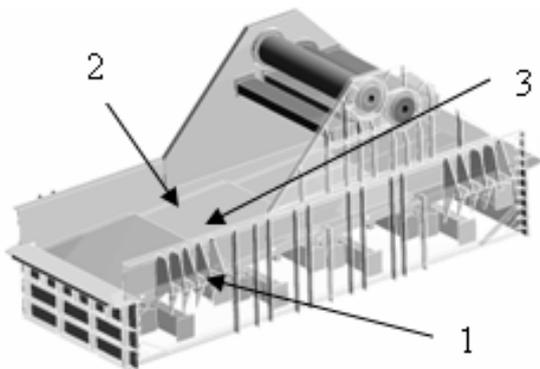


Рис. 9 – Общий вид корпуса виброударной машины

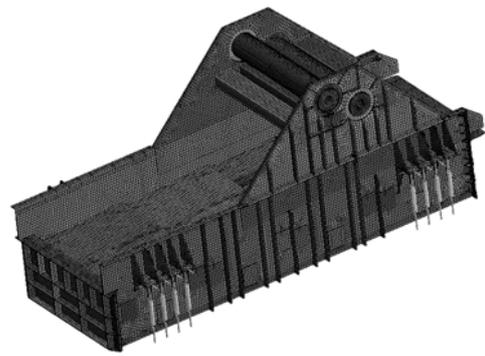


Рис. 10 – Разбиение модели виброударной машины на Shell-элементы

Далее, на рисунке 11, деформированное состояние корпуса при действии на выбивные полотна нагрузки с изолиниями напряжений.

На рисунке 12 – зависимость Z-й компоненты нормальных напряжений от степеней утонения/утолщения листового материала, из которого изготовлен корпус вибромашины (значения фиксировались в трех точках, указанных на рисунке 9).

Данные зависимости наглядно демонстрируют приемлемость линейной аппроксимации зависимости прогибов и напряжений от  $\alpha$ .

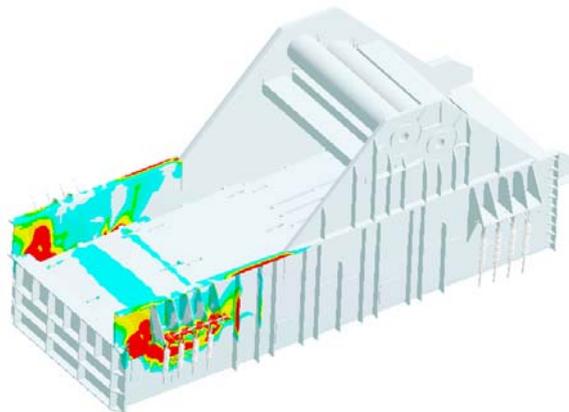


Рис. 11 – Деформированное состояние корпуса при действии на выбивные полотна нагрузки с изолиниями напряжений

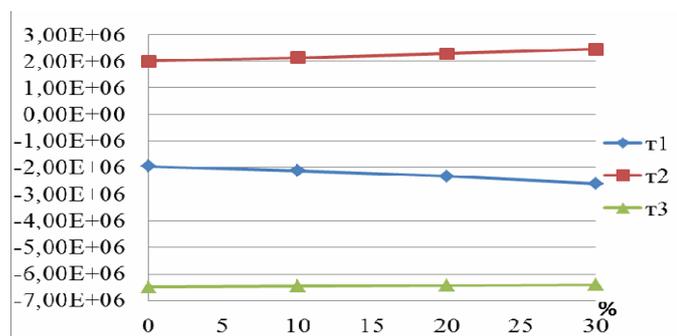


Рис. 12 – Зависимость Z-й компоненты нормальных напряжений от степеней утонения/утолщения листового материала, из которого изготовлен корпус вибромашины (значения фиксировались в трех точках)

Собственные формы колебаний корпуса вибромашины – на рис.13, а на рис. 14 – зависимости его собственных частот колебаний от  $\alpha$ .

И здесь так же не вызывает сомнений возможность линеаризации зависимостей собственных частот колебаний  $\omega_S(\alpha)$ .

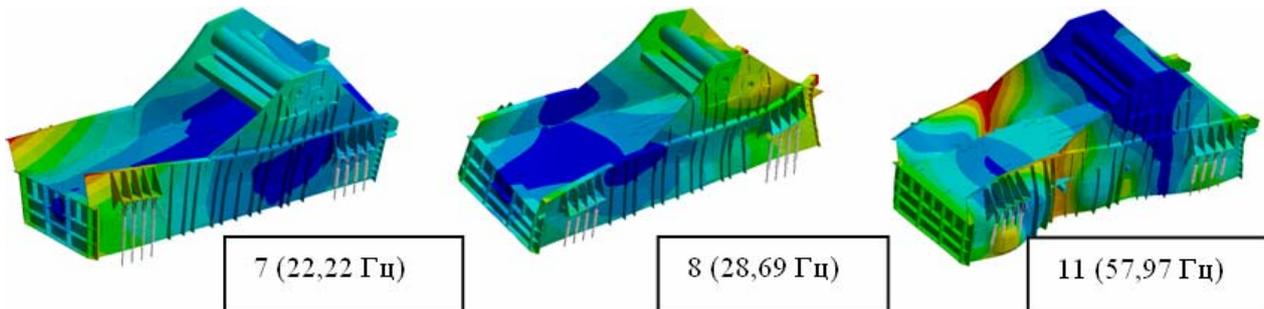


Рис. 13 – Некоторые собственные формы колебаний корпуса вибромашины

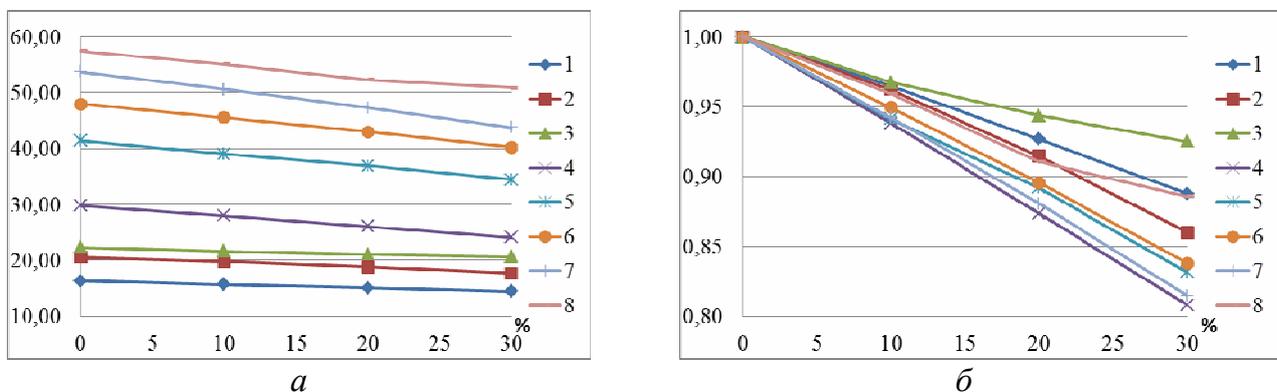


Рис. 14 - «Миграция» собственных частот при утонении элементов конструкции выбивной машины «грохот»:  $a$  – абсолютные значения (Гц);  $б$  – относительные.

**Выводы.** В работе предложен новый подход к определению реакции прочностных, жесткостных и динамических характеристик тонкостенных машиностроительных конструкций на варьирование толщин отдельных их элементов.

Для этого используются точные (т.н. «реперные») решения задач анализа напряженно-деформированного состояния и определения спектра собственных частот колебаний методом конечных элементов, а по изменению решений упомянутых задач по сравнению с базовым вариантом (с набором номинальных толщин) вычисляются при помощи конечно-разностных соотношений соответствующие чувствительности. Далее напряженно-деформированное состояние или спектр собственных частот колебаний исследуемой конструкции представляются как линейная функция от степеней утонения/утолщения отдельных элементов исследуемой конструкции.

Полученные результаты дают основания для следующих выводов:

1. Предложенный подход имеет несомненные преимущества по сравнению с методом простого перебора при многовариантных исследованиях с варьированием толщины отдельных элементов тонкостенных машиностроительных конструкций, т.к. обладает высокой оперативностью проведения расчетов по линеаризованным соотношениям.

2. Традиционные алгоритмы теории возмущения приводят к определению «касательной» чувствительности, т.е. сохраняющей приемлемую точность только в малой окрестности базового варианта конструкции. В противовес этому предложенный подход оперирует с «секущей» чувствительностью, которая дает возможность сохранять высокую степень точности построенным аппроксимационным зависимостям в широком диапазоне варьирования  $\alpha$  (как показала практика расчетных исследований, до значений порядка 25-30% с максимальной погрешностью около 5%).

3. Представленные иллюстративные материалы для корпусов бронетранспортера и вибромашины подтверждают ранее спрогнозированное и аналитически обоснованные приближенно линейные тенденции изменения прочностных, жесткостных и динамических характеристик тонкостенных конструкций при варьировании толщины отдельных их элементов.

Описанный в работе подход, модели и соотношения могут быть использованы в дальнейшем для анализа реакции напряженно-деформированного состояния и собственных частот колебаний, а также для оперативного решения обратных задач – синтеза такого проектного распределения толщин, которое обеспечивает заданные прочностные, жесткостные и динамические характеристики при ограничениях, например, по массе, причем с использованием хорошо разработанных алгоритмов линейного программирования.

**Список литературы:** 1. *Fish J. A. First Course in Finite Elements PDF / J. Fish, T. Belytschko.* – John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 336 p. 2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер. с англ. под ред. *Н. В. Баничука / Васидзу К.* – М.: Мир, 1987. – 542 с. 3. *Биргер И. А.* Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. / Под общей ред. *И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.* – М.: Машиностроение, 1968. 4. *Танченко А. Ю.* Методы расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций при изменении толщины в процессе эксплуатации: дис. кандидата техн. наук: 05.02.09 / *Танченко Андрей Юрьевич.* – Харьков, 2013. – 204 с. [захист 27.11.2013]. 5. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. 4-е изд., испр. / *И. М. Бабаков.* – М.: Дрофа, 2004. – 591 с. 6. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний: Учеб. пособие для вузов / *В. Л. Бидерман.* – М.: Машиностроение, 1972. – 416 с. 7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. / Перев. с англ. под ред. *Б. Е. Победри.* / *О. Зенкевич.* – М.: Мир, 1975. – 542. 8. *Норри Д.* Введение в метод конечных элементов / *Д. Норри, Ж. де Фри.* – М.: Мир, 1981. – 304 с. 9. *Стренг Г.* Теория метода конечных элементов / *Г. Стренг, Дж. Фикс.* – М.: Мир, 1977. – 349 с. 10. *Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor.* – London: Mc Graw-Hill, 1989. – 648 p. 11. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 431 с. 12. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике / *О. К. Зенкевич.* – М.: Мир, 1975. – 541 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. *Fish J. A.* First Course in Finite Elements PDF / *J. Fish, T. Belytschko*. – John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 336 p. 2. *Vasidzu K.* Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. Per. s angl. pod red. *N. V. Banichuka / Vasidzu K.* – M.: Mir, 1987. – 542 s. 3. *Birger I. A.* Prochnost. Ustojchivost. Kolebanija. Spravochnik v treh tomah. / Pod obshej red. *I. A. Birgera i Ja. G. Panovko*. – M.: Mashinostroenie, 1968. 4. *Tanchenko A. Ju.* Metody rascheta naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija tonkostennyh konstrukcij pri izmenenii tolshhiny v processe jekspluatacii: dis. kandidata tehn. nauk: 05.02.09 / *Tanchenko Andrej Jurevich*. Harkov, 2013. – 204 s. [zahist 27.11.2013]. 5. *Babakov I. M.* Teorija kolebanij. 4-e izd., ispr. / *I. M. Babakov*. – M.: Drofa, 2004. – 591 s. 6. *Biderman V. L.* Prikladnaja teorija mehanicheskikh kolebanij: Ucheb. posobie dlja vuzov / *V. L. Biderman*. – M.: Mashinostroenie, 1972. – 416 s. 7. *Zenkevich O.* Metod konechnyh jelementov v tehnikе. / Perv. s angl. pod red. *B. E. Pobedri. / O. Zenkevich*. – M.: Mir, 1975. – 542. 8. *Norri D.* Vvedenie v metod konechnyh jelementov / *D. Norri, Zh. de Fri*. – M.: Mir, 1981. – 304 s. 9. *Streng G.* Teorija metoda konechnyh jelementov / *G. Streng, Dzh. Fiks*. – M.: Mir, 1977. – 349 s. 10. *Zienkiewicz O. S.* The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems / *O. S. Zienkiewicz, R. L. Taylor*. – London: Mc Graw-Hill, 1989. – 648 r. 11. *Gallager R.* Metod konechnyh jelementov. Osnovy. – M.: Mir, 1984. – 431 s. 12. *Zenkevich O. K.* Metod konechnyh jelementov v tehnikе / *O. K. Zenkevich*. – M.: Mir, 1975. – 541 s.

*Надійшла (received) 01.04.2014*